MP102

Solución Febrero 2011

Encuentre aquellos enteros positivos n y $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, tales que $a_1 + a_2 + \cdots a_n = 2011$ y el producto $a_1 \cdot a_2 \cdots a_n$ es máximo.

Respuesta. El producto máximo se alcanza de dos maneras:
con $\mathbf{n} = \mathbf{670}$ utilizando 669 factores 3 y un 4, y
con $\mathbf{n} = \mathbf{671}$ utilizando 669 factores 3 y dos 2.

Recibimos soluciones correctas de

Lou Cairoli (USA)	Bernard Collignon (Francia)
Mei-Hui Fang (Austria)	Philippe Fondanaiche (Francia)
Bruce Golfman (Austria)	Gruian Cornel (Rumania)
Verena Haider (Austria)	Benoît Humbert (Francia)
Ile Ilijevski (Macedonia)	Kipp Johnson (USA)
Wolfgang Kais (Alemania)	Normand LaLiberté (Ontario)
Matthew Lim (USA)	Patrick J. LoPresti (USA)
John T. Robinson (USA)	Mathias Schenker (Suiza)
Heri Setiyawan (Indonesia)	Albert Stadler (Suiza)
Paul Voyer (Francia)	

También recibimos varias respuestas sin explicaciones satisfactorias. Por favor recuerden que buscamos *solutiones*, no simplemente respuestas. Una solución correcta explica de dónde viene la respuesta y por qué es correcta.

Solución. Como el número de posibles grupos de enteros positivos que suman 2011 es finito, al menos uno de ellos debe alcanzar el máximo. Supongamos que $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ es el grupo que buscamos; es decir, el producto $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n$ es el mayor posible entre los grupos de enteros positivos tales que $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = 2011$.

- $n > 1$, de otro modo $a_1 = 2011$ y el "producto" de este número , 2011, no es el máximo. De hecho cualquier conjunto de dos o más enteros positivos mayores que 1 y tales que su suma es 2011, produce un producto mayor que 2011.

- Ninguno de los a_i es 1; de otro modo podemos quitarlo de la lista y cambiar algún $a_j,\ j \neq i$, por $a_j + 1$, manteniendo la suma en 2011 pero incrementando el producto.

- Ninguno de los a_i puede ser 5 o más; de otro modo, si $a_i \geq 5$ podemos agregar dos al conjunto y remplazar a_i por $a_i - 2$, manteniendo la suma en 2011 e incrementando el producto (porque $2(a_i - 2) = 2a_i - 4 > a_i$ cuando $a_i > 4$).

Deducimos que los a_i en el producto máximo son todos iguales a 2, 3, ó 4. Además, en el producto máximo

- no puede haber más que dos 2 (porque si tres a_i fueran iguales a 2, podrían ser remplazados por un par de 3 ($2+2+2 = 3+3$) y el producto resultante se incrementaría ($3 \cdot 3 > 2 \cdot 2 \cdot 2$)).

- no puede haber más que un 4 (porque un par de 4 puede ser remplazado por dos 3 y un 2, que fija la suma pero incrementa el producto), y

- no puede haber al mismo tiempo un 4 y un 2 (porque podrían ser remplazados por dos 3, fijando la suma e incrementando el producto).

En resumen, queremos una colección que contenga la mayor cantidad posible de 3, agregándole dos 2 ó un 4 hasta completar la suma de 2011. Como

$$2011 = 3 \cdot 670 + 1 = 3 \cdot 669 + 4 = 3 \cdot 669 + 2 \cdot 2,$$

debemos usar 669 factores 3 y luego un 4 ó dos 2 para obtener el producto máximo. Este producto es
$4 \cdot 3^{669} = 2^2 \cdot 3^{669} =$
625430993058475627735345593858714553015081394708637260475756313800148211843840935329415403222795915589302569939205425897003519805509694939731310493989960203598356927645249925489567206575014415623015699165339810785069996964459321850612813854978894045855958144172599788149115196208631376985560672039318684346849328842051 32
$\approx 6.25 \times 10^{319}$.

Agradecemos a Lou Cairoli y Jim Altieri quienes — independientemente — nos enviaron el producto, sin lugar a dudas a costa de muchos lápices gastados.

Comentarios. Varios lectores observaron que el mismo argumento sirve para cualquier número $S > 1$ en lugar de 2011; específicamente, el producto máximo de cualquier colección de números cuya suma es $S = 3k + j,\ j = 0, 1, 2$, es
3^k cuando $j = 0$,
$2^2 \cdot 3^{k-1} = 4 \cdot 3^{k-1}$ cuando $j = 1$, y
$2 \cdot 3^k$ cuando $k = 2$.

Varios lectores investigaron qué sucede cuando se consideran, en lugar de números naturales positivos, números reales positivos a_i cuya suma es 2011. La desigualdad aritmético-geométrica implica que el producto de los a_i se maximiza cuando $a_i = x$ para todo i para un número fijo x. Entonces, en el caso real, queremos encontrar el valor de x que maximiza $f(x) = x^{\frac{2011}{x}}$. Aquellos de nosotros que hemos visto suficiemente análisis matemático sabemos que $f(x)$ alcanza su máximo cuando $x = e$. El número de términos es aproximadamente $\frac{2011}{e} \approx \frac{2011}{2.718} \approx 739.9$. Calculando $\left(\frac{2011}{739}\right)^{739}$ y $\left(\frac{2011}{740}\right)^{740}$ (utilizando logaritmos) vemos que el producto se alcanza con $a_i = \frac{2011}{740}$ para todo i. Esto lleva al producto máximo $\left(\frac{2011}{740}\right)^{740} \approx 1.97 \times 10^{321}$, algo mayor que en la solución al problema original.

Algunos lectores intentaron deducir del problema para números reales que poniendo la mayor cantidad posible de a_i igual al entero más cercano a e, es decir 3, se resuelve el problema original. Tal vez sea así, pero nadie mostró un argumento convincente de que el caso entero se sigue del caso real.