MP101

Problem for January 2011

La fórmula de Herón determina el área de un triángulo en términos de la longitud de sus tres lados. ¿Es cierto que el volumen de un tetrahedro está determinado por las áreas de sus cuatro caras?

Recibimos soluciones correctas de

Claudio Baiocchi (Italia)	Benoît Humbert (Francia)
Lou Cairoli (USA)	Ile Ilijevski (Macedonia)
Mei-Hui Fang (Austria)	Wolfgang Kais (Alemania)
Philippe Fondanaiche (Francia)	John T. Robinson (USA)
Bruce Golfman (Austria)	Albert Stadler (Suiza)
Verena Haider (Austria)	

La respuesta es *no*, el volumen de un tetrahedro no queda determinado por las áreas de sus cuatro caras. Un contraejemplo sencillo, que fue mencionado en aproximadamente la mitad de las respuestas, se obtiene comparando el tetrahedro regular (con tamaño tal que las caras tengan área 1) con el cuadrado de área 2. El tetrahedro regular tiene volumen positivo, mientras que el cuadrado $ABCD$ es un tetrahedro degenerado cuyas caras ABC, BCD, CDA, DAB tienen todas área 1, pero el volumen es 0. Esto nos dice que no hay una fórmula análoga a la de Herón, ya que fallaría en el ejemplo mencionado.

Para aquellos lectores que no estén muy felices con el uso de figuras degeneradas, podemos producir una solución más satisfactoria. Mencionemos primero algunos hechos básicos sobre tetrahedros; estas propiedades son mencionadas en muchas páginas web (Wikipedia, por ejemplo), donde pueden también encontrarse muchas referencias. Todas las soluciones recibidas consideraron tetrahedros *isósceles*, cuyas cuatro caras tienen – por definición – la misma área. Estos tetrahedros se comportan particularmente bien, como indica el siguiente resultado:

Teorema. *Si un tetrahedro satisface una de las siguientes seis propiedades, entonces es isósceles y satisface las otras 5.*

i. Las cuatro caras tienen la misma área.

ii. Las cuatro caras tienen el mismo perímetro

iii. Las cuatro caras son congruentes

iv. Lados opuestos son iguales

v. Los ángulos entre las tres caras en cualquier vértices suman $180°$*.*

vi. Las esferas inscrita y circunscripta tienen el mismo centro.

Como menciona Baiocchi, se sigue que se puede construir un modelo para un tetrahedro isósceles arbitrario a partir de un triángulo plano, usando su base como triángulo medial (cuyos vértices son los puntos medios del triángulo dado) y doblando los otros tres triángulos congruentes hacie arriba: doble a lo largo de las líneas punteadas en el triángulo que se muestra a la izquierda de la figura, para obtener el tetrahedro de la derecha.

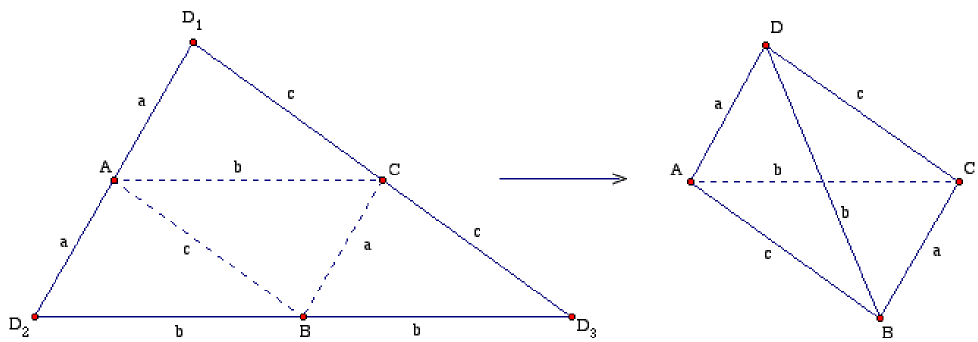

Figure 1: Un tetrahedro isósceles con lados de longitudes $a, b,\ c$.

Podemos simplificarnos las cosas poniendo $a = b$, de manera que cada cara del tetrahedro es un triángulo isósceles cuyos lados miden a, a, c y su área

$$A = \frac{c\sqrt{4a^2 - c^2}}{4}.$$

(sobre el origen de esta fórmula y la que sigue para el volumen, vea el apéndice al final). Si ponemos $A = 1$ y permitimos que c varíe, $a = \sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{4}{c^2}}$, y el volumen del tetrahedro en términos del lado c será

$$V = \frac{c^2}{\sqrt{72}}\sqrt{\frac{8}{c^2} - \frac{c^2}{2}}.$$

Se ve que el volumen se acerca a 0 a medida que c se acerca tanto a 0 como a (donde el tetrahedro degenera en un cuadrado); entre ambos extremos el volumen es positivo, creciendo hasta su máximo en $c = \frac{2}{3^{1/4}} \approx 1.52$ (donde el tetrahedro es regular).

Un camino alternativo. Varias respuestas utilizaron vectores. Podemos hacer que los vértices de nuestro tetrahedro isósceles tengan coordenadas

$$(0, 0, 0), \quad (a, b, 0), \quad (0, b, c), \quad \text{y} \quad (a, 0, c).$$

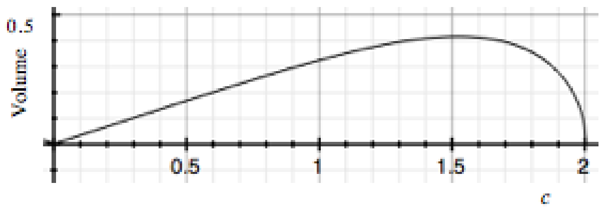

Figure 2: Volumen de un tetrahedro isósceles en función de c cuando sus caras tienen área unidad y los lados miden a, a, c.

Las longitudes de los lados vienen en pares, $\sqrt{a^2+b^2}$, $\sqrt{b^2+c^2}$, y $\sqrt{a^2+c^2}$. Las fórmulas vectoriales estándar para el volumen y el área nos dan

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ 0 & b & c \\ a & 0 & c \end{vmatrix} = \frac{1}{3}abc, \quad \text{and} \quad A = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ c \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2}.$$

De nuevo la tarea se simplifica si ponemos $a = c$.

Tetrahedron	a	b	Volume	Face area
General	a	b	$\frac{1}{3}a^2b$	$\frac{a}{2}\sqrt{a^2+2b^2}$
Regular	1	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
Non-planar	$\sqrt[4]{2}$	$\frac{1}{\sqrt[4]{8}}$	$\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{8}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
Planar	$\sqrt[4]{3}$	0	0	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$

Figure 3: (Golfman) tabla de volúmenes y áreas de las caras de tetrahedros cuyos vértices son $(0,0,0), (a,b,0), (0,b,a)$, $(a,0,a)$.

Comentarios. El problema de enero viene de la Olimpíada Matemática Canadiense de 1983, propuesto por John Wilker. Cairoli encontró varias referencias que tratan con problemas relacionados. Podría parecer posible que exista a lo sumo un tetrahedro cuando se especifican su volumen y las áreas de sus caras. Pero no es así: Lisoněk e Israel mostraron que el tetrahedro puede no ser único aún con circumrado especificado [Petr Lisoněk and Robert B. Israel, Metric invariants of tetrahedra via polynomial elimination. C. Traverso, Ed., *Proceedings of the 2000 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, ACM Press (2000) 217-219]. De hecho existe una familia infinita de tetrahedros no-congruentes que tienen el mismo volumen, circumradio, y áreas de sus caras [Lu Yang and Zhenbing Zeng, An open problem on metric invariants of tetrahedra. M. Kauers, Ed., *Proceedings of the 2005 International Symposium on Symbolic and Algebraic*

Computation, ACM Press (2005) 362-364]. Por otra parte C. -S. Lin in [The Volume of a Tetrahedron and Areas of its Faces. *Crux Math. with Mayhem*, **27**:3 (April 2001) 207-212] discute una variedad de familias de tetrahedros cuyos volúmenes sí están determinandos por las áreas de sus caras. Un tal ejemplo es lo que llama un "tetrahedro de Herón", que es un tetrahedro con al menos un par de caras que se encuentran en ángulos rectos.

Apéndice. Los determinantes de Cayley-Menger dan el volumen de un simplex en espacio n-dimensional en términos de la longitud de sus lados. Hemos usado dos casos en nuestra discusión de áreas y volúmenes. En dos dimensiones, el área A de un triángulo cuyos lados miden a, b, c satisface

$$-16A^2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix} = (a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) \ ,$$

que reconocemos como la fórmula de Herón.

En tres dimensiones, etiquetamos las longitudes de los lados de una cara como a, b, c, y los lados opuestos a éstos como a', b', c', respectivamente. El volúmen V satisface

$$288V^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 & a'^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 & b'^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 & c'^2 \\ 1 & a'^2 & b'^2 & c'^2 & 0 \end{vmatrix} \ .$$

Se puede encontrar una demostración sencilla y una discusión de su historia en [Reuben Hersh, *College Math. J.*, **35**:2 (March 2004) 112-114]. Es equivalente a la fórmula asociada con el nombre de Tartaglia (1500(?)-1557), aunque claramente fue descubierta un siglo antes por el artista renacentista Piero della Francesca (1420(?)-1492). Notemos que en el caso del tetrahedro isósceles, $a = a', b = b', c = c'$. Cuando ponemos $a = b$, estos determinantes se reducen a las fórmulas de área y volumen que dimos antes.